

Факултет заштите на раду у Нишу

Предмет: Математика

ИЗВОД – ВЕЖБЕ

1. Наћи једначину тангенте параболе $y = 4x - x^2$ која пролази кроз тачку $(1, 3)$. Скицирати слику.

РЕШЕЊЕ: Нека је задата функција $y = f(x)$. Тангента је права линија, па је њена једначина $y = kx + n$. За рачунање коефицијента правца тангенте која пролази кроз тачку $(x_0, f(x_0))$ користимо образац

$$k = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

или образац

$$k = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

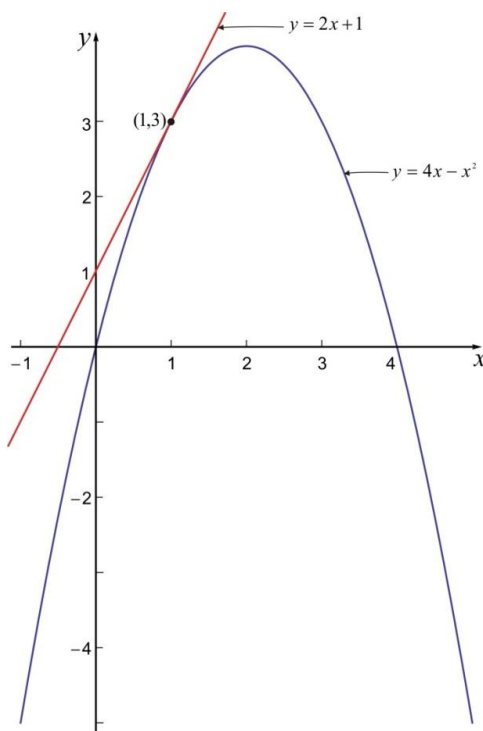
Дакле, извод функције f у тачки x_0 , тј. број $f'(x_0)$, ћемо рачунати помоћу дефиниције извода. У нашем примеру је $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 1$ и $f(x_0) = f(1) = 3$. Тражимо тангенту која пролази кроз тачку $(x_0, f(x_0)) = (1, 3)$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1+h) - (1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h - (1 + 2h + h^2) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h - 1 - 2h - h^2 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - h) = 2 \end{aligned}$$

Дакле, коефицијент правца тангенте је $k = 2$. Како тачка $(1, 3)$ припада и тангенти $y = kx + n$, онда је

$$3 = k \cdot 1 + n = 2 \cdot 1 + n = 2 + n.$$

Одавде добијамо да је $n = 1$. Једначина тражене тангенте је $y = 2x + 1$.



2. Дата је функција $f(x) = x^2$ и тачка $(-2, 4)$. Наћи једначину тангенте ове криве која пролази кроз дату тачку. Скицирати слику.

РЕШЕЊЕ: Једначина тангенте је $y = kx + n$. Коефицијент правца тангенте ћемо рачунати на исти начин као у претходном задатку:

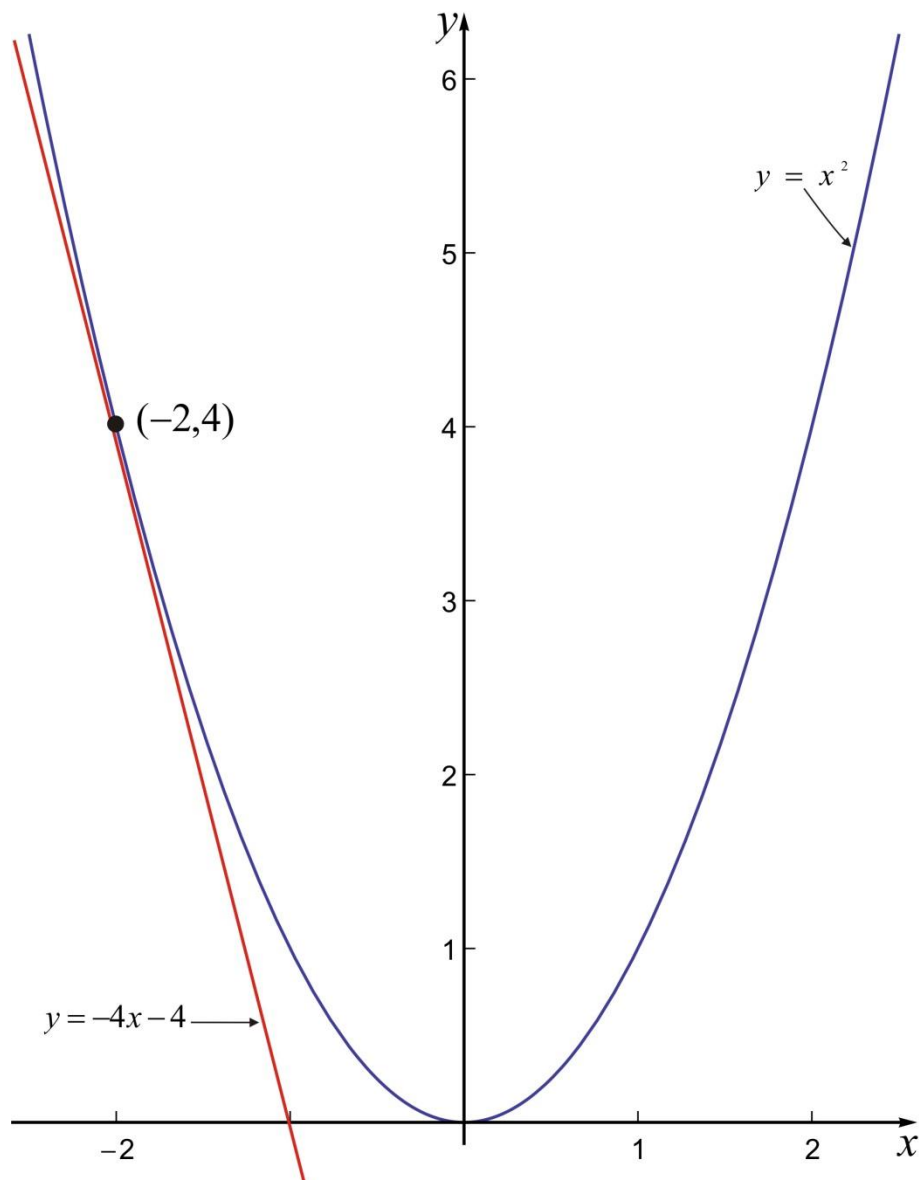
$$k = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

У нашем примеру је $x_0 = -2$ и $f(x_0) = f(-2) = (-2)^2 = 4$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4 \end{aligned}$$

Следи да једначина тангенте има облик $y = -4x + n$. Како тачка $(-2, 4)$ припада и тангенти, онда је:

$4 = -4 \cdot (-2) + n$, тј. $4 = 8 + n$, а одавде добијамо $n = -4$. Једначина тангенте је $y = -4x - 4$.



3. За сваку од наведених кривих линија наћи једначину тангенте која пролази кроз задату тачку.

(а) $y = 2x^3 - x^2 + 2$, тачка: (1, 3).

РЕШЕЊЕ: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$, $(x_0, f(x_0)) = (1, 3)$. Једначина тангенте кроз тачку $(x_0, f(x_0)) = (1, 3)$ је $y = kx + n$; коефицијент правца тангенте је $k = f'(x_0) = f'(1)$. Поступићемо овако: наћи ћемо прво извод $f'(x)$ коришћењем правила диференцирања, а потом ћемо $f'(1)$ израчунати тако што ћемо у $f'(x)$ ставити $x = x_0 = 1$.

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 + 2)' = (2x^3)' - (x^2)' + 2' = 2(x^3)' - 2x + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 2x = 6x^2 - 2x$$

$$k = f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4.$$

Тангента има једначину $y = 4x + n$. Тачка (1,3) припада тангенти, па је $3 = 4 \cdot 1 + n$, односно $n = -1$. Једначина тражене тангенте је

$$y = 4x - 1.$$

(б) $y = x + \frac{2}{x}$, тачка: (2, 3).

РЕШЕЊЕ: $f(x) = x + \frac{2}{x}$, $(x_0, f(x_0)) = (2, 3)$, једначина тангенте: $y = kx + n$. Поступамо као у претходном примеру.

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)' = x' + \left(\frac{2}{x}\right)' = 1 + 2\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$k = f'(2) = 1 - \frac{2}{2^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Тангента има једначину $y = \frac{1}{2}x + n$. Тачка (2,3) припада тангенти, па је $3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n$, односно $n = 2$. Једначина тражене тангенте је

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

(в) $y = x^4 + 2e^x$, тачка: (0, 2).

РЕШЕЊЕ: $f(x) = x^4 + 2e^x$, $(x_0, f(x_0)) = (0, 2)$, једначина тангенте је: $y = kx + n$. Поступамо као у претходна два примера.

$$f'(x) = (x^4 + 2e^x)' = (x^4)' + (2e^x)' = 4x^3 + 2(e^x)' = 4x^3 + 2e^x$$

$$k = f'(0) = 4 \cdot 0^3 + 2 \cdot e^0 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Тангента има једначину $y = 2x + n$. Тачка (0,2) припада тангенти, па је $2 = 2 \cdot 0 + n$, односно $n = 2$. Једначина тражене тангенте је

$$y = 2x + 2$$

4. Дата је функција $f(x) = 3x^2 + 1$.

(а) Наћи извод функције $f(x) = 3x^2 + 1$ у тачки $x_0 = 4$ користећи дефиницију извода

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(4 + h)^2 + 1] - [3 \cdot 4^2 + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4^2 + 2 \cdot 4 \cdot h + h^2) + 1 - 48 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(16 + 8h + h^2) - 48}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 + 24h + 3h^2 - 48}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (24 + 3h) = 24 \\ f'(4) &= 24 \end{aligned}$$

(б) Наћи извод функције $f(x) = 3x^2 + 1$ у тачки $x_0 = 4$ користећи дефиницију извода

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

РЕШЕЊЕ: Подсетник: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \leftarrow$ разлика квадрата.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 + 1) - (3 \cdot 4^2 + 1)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 + 1 - 49}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 48}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x^2 - 16)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x^2 - 4^2)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} 3(x + 4) = \lim_{x \rightarrow 4} (3x + 12) = 3 \cdot 4 + 12 = 24 \\ f'(4) &= 24 \end{aligned}$$

(в) Наћи извод функције $f(x) = 3x^2 + 1$ у тачки $x_0 = 4$ користећи таблицу извода и правила диференцирања.

РЕШЕЊЕ: $f'(x) = (3x^2 + 1)' = (3x^2)' + 1' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$. Дакле, $f'(x) = 6x$. Сада је: $f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$.

$$f'(4) = 24$$

Задатак смо урадили на три начина, али резултат је увек исти: $f'(4) = 24$.

5. Дата је функција $f(x) = x^3$.

(а) Наћи извод функције f у тачки $x_0 = 2$ користећи дефиницију извода

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

РЕШЕЊЕ: Подсетник: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \leftarrow$ куб бинома.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12 \\ f'(2) &= 12 \end{aligned}$$

(б) Наћи извод функције f у тачки $x_0 = 2$ користећи дефиницију извода

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

РЕШЕЊЕ: Подсетник: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \leftarrow$ разлика кубова.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12 \\ f'(2) &= 12 \end{aligned}$$

(в) Наћи извод функције f у тачки $x_0 = 2$ користећи таблицу извода.

РЕШЕЊЕ: Из таблице извода видимо да је $f'(x) = 3x^2$. Сада је $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$.

$$f'(2) = 12$$

Задатак смо урадили на три начина, али резултат је увек исти: $f'(2) = 12$.

6. Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{x+6}$.

(а) Наћи извод функције f у тачки $x_0 = 3$ користећи дефиницију извода

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left(\frac{x^2}{x+6}\right) - \left(\frac{3^2}{3+6}\right)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x^2}{x+6} - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x^2}{x+6} - \frac{x+6}{x+6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x^2 - (x+6)}{x+6}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x+6)(x-3)} \end{aligned}$$

Сада треба раставити на чиниоце квадратни трином $x^2 - x - 6$ ($a = 1$, $b = -1$, $c = -6$).
 $x^2 - x - 6 = a(x - x_1)(x - x_2)$, где су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 - x - 6 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}, \quad x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

Сада добијамо: $x^2 - x - 6 = 1 \cdot (x - (-2))(x - 3)$, односно $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

Сада се враћамо на рачунање извода $f'(3)$:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x + 6)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 6)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x + 6} = \frac{3 + 2}{3 + 6} = \frac{5}{9}$$

$$f'(3) = \frac{5}{9}$$

(б) Наћи извод функције f у тачки $x_0 = 3$ користећи таблицу извода и правила диференцирања.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x + 6} \right)' = \frac{(x^2)'(x + 6) - x^2(x + 6)'}{(x + 6)^2} = \frac{2x(x + 6) - x^2(x' + 6')}{(x + 6)^2} = \frac{2x(x + 6) - x^2(1 + 0)}{(x + 6)^2} \\ &= \frac{2x(x + 6) - x^2}{(x + 6)^2} = \frac{2x^2 + 12x - x^2}{(x + 6)^2} = \frac{x^2 + 12x}{(x + 6)^2} = \frac{x(x + 12)}{(x + 6)^2} \end{aligned}$$

Добили смо: $f'(x) = \frac{x(x+12)}{(x+6)^2}$, па је $f'(3) = \frac{3(3+12)}{(3+6)^2} = \frac{3 \cdot 15}{9 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 9} = \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 9} = \frac{5}{9}$.

$$f'(3) = \frac{5}{9}$$

Задатак смо урадили на два начина, и у једном и у другом случају смо добили исти резултат.

7. Наћи изводе следећих функција. Приликом рада користити таблицу извода и следећа два правила:

$$(cf(x))' = cf'(x) \quad (c \text{ је константа})$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

(а) $f(x) = 2^{40}$

РЕШЕЊЕ: Функција $f(x)$ је константна функција јер је 2^{40} број, па је $f'(x) = (2^{40})' = 0$.

$$f'(x) = 0$$

(б) $f(x) = 5,2x + 2,3$

РЕШЕЊЕ: $f'(x) = (5,2x + 2,3)' = (5,2x)' + (2,3)' = 5,2x' + 0 = 5,2 \cdot 1 + 0 = 5,2$

$$f'(x) = 5,2$$

(в) $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 4t$

РЕШЕЊЕ: $f'(t) = (2t^3 - 3t^2 - 4t)' = (2t^3)' - (3t^2)' - (4t)' = 2(t^3)' - 3(t^2)' - 4t' = 2 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 2t - 4 \cdot 1 = 6t^2 - 6t - 4$.

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 4$$

$$(г) g(x) = x^2(1 - 2x)$$

$$\text{РЕШЕЊЕ: } g(x) = x^2(1 - 2x) = x^2 \cdot 1 - x^2 \cdot 2x = x^2 - 2x^3$$

$$g'(x) = (x^2 - 2x^3)' = (x^2)' - (2x^3)' = 2x - 2(x^3)' = 2x - 2 \cdot 3x^2 = 2x - 6x^2; g'(x) = 2x - 6x^2$$

$$g'(x) = 2x - 6x^2$$

$$(д) F(r) = \frac{5}{r^3}$$

РЕШЕЊЕ:

$$F'(r) = \left(\frac{5}{r^3}\right)' = (5r^{-3})' = 5 \cdot (r^{-3})' = 5 \cdot (-3) \cdot r^{-3-1} = -15r^{-4} = -\frac{15}{r^4}$$

$$F'(r) = -\frac{15}{r^4}$$

$$(ђ) f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$$

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = (3 \sin x - 2 \cos x)' = (3 \sin x)' - (2 \cos x)' = 3(\sin x)' - 2(\cos x)' = 3 \cos x - 2(-\sin x) \\ = 3 \cos x + 2 \sin x$$

$$f'(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$$

$$(е) F(t) = t^3 + e^3$$

РЕШЕЊЕ:

$$F'(t) = (t^3 + e^3)' = (t^3)' + (e^3)' = 3t^2 + 0 = 3t^2$$

Приметимо да је e^3 константа (број), па је њен извод једнак нули.

$$F'(t) = 3t^2$$

$$(ж) s(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$$

РЕШЕЊЕ:

$$s'(t) = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)' = \left(\frac{1}{t}\right)' + \left(\frac{1}{t^2}\right)' = -\frac{1}{t^2} + (t^{-2})' = -\frac{1}{t^2} + (-2)t^{-2-1} = -\frac{1}{t^2} - 2t^{-3} = -\frac{1}{t^2} - 2 \cdot \frac{1}{t^3} \\ = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}$$

$$s'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}$$

$$(3) g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x} \right)' = \left(\frac{1}{x^{1/2}} + x^{1/4} \right)' = (x^{-1/2} + x^{1/4})' = (x^{-1/2})' + (x^{1/4})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{1}{4}x^{-3/4} \end{aligned}$$

$$x^{-3/2} = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \cdot x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$x^{-3/4} = \frac{1}{x^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

Сада имамо:

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{1}{4}x^{-3/4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$(n) f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$$

РЕШЕЊЕ: Подсетник: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \leftarrow$ Основни тригонометријски идентитет

Подсетник: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \leftarrow$ Синус двоструког угла

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{4}{(2 \sin x \cos x)^2} = \frac{4}{(\sin 2x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

8. Наћи изводе следећих функција (Подсетник: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \leftarrow$ Извод производа):

$$(a) f(x) = xe^x$$

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = (xe^x)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$$

$$f'(x) = (x+1)e^x$$

$$(б) f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((3x^2 - 5x)e^x)' = (3x^2 - 5x)'e^x + (3x^2 - 5x)(e^x)' = ((3x^2)' - (5x)')e^x + (3x^2 - 5x)e^x \\ &= (3(x^2)' - 5x')e^x + (3x^2 - 5x)e^x = (3 \cdot 2x - 5 \cdot 1)e^x + (3x^2 - 5x)e^x \\ &= (6x - 5)e^x + (3x^2 - 5x)e^x = (6x - 5 + 3x^2 - 5x)e^x = (3x^2 + x - 5)e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = (3x^2 + x - 5)e^x$$

$$(в) H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} H'(u) &= ((u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u}))' = (u - \sqrt{u})'(u + \sqrt{u}) + (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})' \\ &= (u' - (\sqrt{u})')(u + \sqrt{u}) + (u - \sqrt{u})(u' + (\sqrt{u})') \\ &= \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(u + \sqrt{u}) + (u - \sqrt{u})\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \\ &= \left(1 \cdot u + 1 \cdot \sqrt{u} - \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u - \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \sqrt{u}\right) + \left(u \cdot 1 + u \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u} \cdot 1 - \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \\ &= u + \sqrt{u} - \frac{\sqrt{u}}{2} - \frac{1}{2} + u + \frac{\sqrt{u}}{2} - \sqrt{u} - \frac{1}{2} = 2u - 1 \end{aligned}$$

$$H'(u) = 2u - 1$$

$$(г) x(t) = t - \sin t \cos t$$

РЕШЕЊЕ: Подсетник: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \leftarrow$ Основни тригонометријски идентитет

$$\begin{aligned} x'(t) &= (t - \sin t \cos t)' = t' - (\sin t \cos t)' = 1 - ((\sin t)' \cos t + \sin t (\cos t)') \\ &= 1 - (\cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot (-\sin t)) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t - \cos^2 t + \sin^2 t = 2\sin^2 t \end{aligned}$$

$$x'(t) = 2\sin^2 t$$

$$(д) f(x) = e^x \cos x$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \cos x)' \\ &= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' \\ &= e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$(ђ) f(x) = x \operatorname{ctg} x$$

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = (x \operatorname{ctg} x)' = x' \operatorname{ctg} x + x (\operatorname{ctg} x)' = 1 \cdot \operatorname{ctg} x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

(е) $f(x) = x^2 \arcsin x$

РЕШЕНИЕ:

$$f'(x) = (x^2 \arcsin x)' \\ = (x^2)' \arcsin x + x^2 (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = x \left(2 \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$f'(x) = x \left(2 \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

(ж) $f(x) = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$

РЕШЕНИЕ:

$$f'(x) = \left(\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot ((1+x^2)\operatorname{arctg} x - x) \right)' = \frac{1}{2} ((1+x^2)\operatorname{arctg} x - x)' \\ = \frac{1}{2} (((1+x^2)\operatorname{arctg} x)' - x') = \frac{1}{2} ((1+x^2)' \operatorname{arctg} x + (1+x^2)(\operatorname{arctg} x)' - 1) \\ = \frac{1}{2} \left((1' + (x^2)') \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (2x \operatorname{arctg} x + 1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2x \operatorname{arctg} x \\ = x \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = x \operatorname{arctg} x$$

(з) $f(x) = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$

РЕШЕНИЕ:

$$f'(x) = \left(x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} \right)' = (x^3 \ln x)' - \left(\frac{x^3}{3} \right)' = (x^3 \ln x)' - \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 \right)' \\ = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' - \frac{1}{3} (x^3)' \\ = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 3x^2 \ln x + x^2 - x^2 = 3x^2 \ln x$$

$$f'(x) = 3x^2 \ln x$$

(и) $g(\theta) = e^\theta (\operatorname{tg} \theta - \theta)$

РЕШЕНИЕ:

$$g'(\theta) = \left(e^\theta (\operatorname{tg} \theta - \theta) \right)' = (e^\theta)' (\operatorname{tg} \theta - \theta) + e^\theta (\operatorname{tg} \theta - \theta)' = e^\theta (\operatorname{tg} \theta - \theta) + e^\theta ((\operatorname{tg} \theta)' - \theta') \\ = e^\theta (\operatorname{tg} \theta - \theta) + e^\theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) = e^\theta \left(\operatorname{tg} \theta - \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)$$

$$g'(\theta) = e^\theta \left(\operatorname{tg} \theta - \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)$$

9. Наћи извод функције $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ на два начина: коришћењем правила по коме се тражи извод производа две функције и тако што ће се прво помножити заграде и тек онда тражити извод. Да ли се резултати слажу?

РЕШЕЊЕ:

Коришћење правила диференцирања производа:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((1 + 2x^2)(x - x^2))' = (1 + 2x^2)'(x - x^2) + (1 + 2x^2)(x - x^2)' \\ &= (1' + (2x^2)')(x - x^2) + (1 + 2x^2)(x' - (x^2)') \\ &= (0 + 2(x^2)')(x - x^2) + (1 + 2x^2)(1 - 2x) = 2 \cdot 2x(x - x^2) + (1 + 2x^2)(1 - 2x) \\ &= 4x(x - x^2) + (1 + 2x^2)(1 - 2x) = 4x^2 - 4x^3 + 1 - 2x + 2x^2 - 4x^3 \\ &= -8x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -8x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

Прво множимо заграде, а затим диференцирамо:

$$f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2) = 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot x - 2x^2 \cdot x^2 = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4$$

$$f(x) = -2x^4 + 2x^3 - x^2 + x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x^4 + 2x^3 - x^2 + x)' = (-2x^4)' + (2x^3)' - (x^2)' + x' = -2(x^4)' + 2(x^3)' - 2x + 1 \\ &= -2 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 2x + 1 = -8x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -8x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

Закључак: оба начина дају исти резултат!

10. Наћи изводе следећих функција (Подсетник: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \leftarrow$ Извод количника):

(а) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{x'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{1 - x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x}$$

(б) $g(x) = \frac{1+2x}{3-4x}$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1+2x}{3-4x}\right)' = \frac{(1+2x)'(3-4x) - (1+2x)(3-4x)'}{(3-4x)^2} = \frac{(1' + (2x)')(3-4x) - (1+2x)(3' - (4x)')}{(3-4x)^2} \\ &= \frac{(0 + 2x')(3-4x) - (1+2x)(0 - 4x')}{(3-4x)^2} = \frac{(0 + 2 \cdot 1)(3-4x) - (1+2x)(0 - 4 \cdot 1)}{(3-4x)^2} \\ &= \frac{2(3-4x) - (1+2x)(-4)}{(3-4x)^2} = \frac{2 \cdot 3 - 2 \cdot 4x + 4(1+2x)}{(3-4x)^2} = \frac{6 - 8x + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2x}{(3-4x)^2} \\ &= \frac{6 - 8x + 4 + 8x}{(3-4x)^2} = \frac{10}{(3-4x)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{10}{(3-4x)^2}$$

$$(в) f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$(г) s(t) = \frac{t}{1-t^2}$$

РЕШЕНИЕ:

$$s'(t) = \left(\frac{t}{1-t^2} \right)' = \frac{t'(1-t^2) - t(1-t^2)'}{(1-t^2)^2} = \frac{1 \cdot (1-t^2) - t \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{1-t^2+2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$$

$$s'(t) = \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$$

$$(д) f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$$

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2-2)'(x-1) - (x^2-2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2-2) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$$

$$(ж) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)' = \frac{(\sqrt{x})'(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 1 - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{1}} = \frac{1 \cdot 1}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$(e) f(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right)' = \frac{(\sin \theta)'(1 + \cos \theta) - \sin \theta (1 + \cos \theta)'}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta (1 + \cos \theta) - \sin \theta (1' + (\cos \theta)')}{(1 + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta (1 + \cos \theta) - \sin \theta (-\sin \theta)}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta + 1}{(1 + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = \frac{1}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$(ж) f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = \frac{1' \cdot \ln x - 1 \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{0 \cdot \ln x - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{1}{1}} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

$$(3) P(v) = \frac{\ln v}{1-v}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} P'(v) &= \left(\frac{\ln v}{1-v} \right)' = \frac{(\ln v)'(1-v) - \ln v (1-v)'}{(1-v)^2} = \frac{\frac{1}{v}(1-v) - (\ln v)(-1)}{(1-v)^2} = \frac{\frac{1-v}{v} + \ln v}{(1-v)^2} \\ &= \frac{\frac{1-v}{v} + \frac{v \ln v}{v}}{(1-v)^2} = \frac{\frac{1-v + v \ln v}{v}}{\frac{(1-v)^2}{1}} = \frac{1-v + v \ln v}{v(1-v)^2} \end{aligned}$$

$$P'(v) = \frac{1-v + v \ln v}{v(1-v)^2}$$

11. Наћи изводе следећих функција (потребно је користити правила за извод сложене функције).

$$(a) f(x) = \sqrt{5x+1}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{5x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}} (5x+1)' = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}} ((5x)' + 1') = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}} (5x)' = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}} \cdot 5 \cdot x' \\ &= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \cdot 1 = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

$$(б) F(t) = \left(\frac{1}{2t+1}\right)^4$$

РЕШЕЊЕ: Прво ћемо трансформисати функцију $F(t) = \left(\frac{1}{2t+1}\right)^4$:

$$F(t) = \left(\frac{1}{2t+1}\right)^4 = [(2t+1)^{-1}]^4 = (2t+1)^{-4}$$

Сада имамо:

$$F'(t) = [(2t+1)^{-4}]' = -4(2t+1)^{-4-1}(2t+1)' = -4(2t+1)^{-5} \cdot 2 = -\frac{8}{(2t+1)^5}$$

$$F'(t) = -\frac{8}{(2t+1)^5}$$

$$(в) g(x) = e^{x^2-x}$$

РЕШЕЊЕ:

$$g'(x) = (e^{x^2-x})' = e^{x^2-x}(x^2-x)' = e^{x^2-x} \cdot (2x-1) = (2x-1)e^{x^2-x}$$

$$g'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$$

$$(г) f(x) = x^2e^{-3x}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2e^{-3x})' = (x^2)'e^{-3x} + x^2(e^{-3x})' = 2xe^{-3x} + x^2e^{-3x}(-3x)' = 2xe^{-3x} + x^2e^{-3x}(-3) \\ &= 2xe^{-3x} - 3x^2e^{-3x} = (2x-3x^2)e^{-3x} = (2-3x)xe^{-3x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2-3x)xe^{-3x}$$

$$(д) f(t) = t \sin \pi t$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t \sin \pi t)' \\ &= t' \sin \pi t + t(\sin \pi t)' \\ &= 1 \cdot \sin \pi t + t(\cos \pi t)(\pi t)' = \sin \pi t + t(\cos \pi t) \cdot \pi = \sin \pi t + \pi t \cos \pi t \end{aligned}$$

$$f'(t) = \sin \pi t + \pi t \cos \pi t$$

$$(ђ) g(x) = \arccos \sqrt{x}$$

РЕШЕЊЕ:

$$g'(x) = (\arccos \sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

(е) $h(t) = \operatorname{arcctg} t + \operatorname{arcctg}(1/t)$

РЕШЕЊЕ:

$$(\operatorname{arcctg} t)' = -\frac{1}{1+t^2}$$

$$\left[\operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{t} \right) \right]' = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{t} \right)^2} \left(\frac{1}{t} \right)' = -\frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) t^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

Сада имамо:

$$h'(t) = \left[\operatorname{arcctg} t + \operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{t} \right) \right]' = (\operatorname{arcctg} t)' + \left[\operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{t} \right) \right]' = -\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} = 0$$

$$h'(t) = 0$$

(ж) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

РЕШЕЊЕ:

$$y' = \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right)' = (x \arcsin x)' + \left(\sqrt{1-x^2} \right)'$$

Поступићемо поступно:

$$(x \arcsin x)' = x' \arcsin x + x(\arcsin x)' = 1 \cdot \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Сада добијамо:

$$y' = (x \arcsin x)' + \left(\sqrt{1-x^2} \right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$y' = \arcsin x$$

(з) $p(t) = \ln \sqrt{t^2+1}$

РЕШЕЊЕ:

$$p'(t) = \left(\ln \sqrt{t^2+1} \right)' = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \left(\sqrt{t^2+1} \right)' = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \cdot (t^2+1)' = \frac{1}{2(t^2+1)} \cdot 2t = \frac{t}{t^2+1}$$

$$p'(t) = \frac{t}{t^2+1}$$

(и) $y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x} \right)' = (\sin 3x)' + \left(\cos \frac{x}{5} \right)' + (\operatorname{tg} \sqrt{x})' = \\ &= \cos 3x \cdot (3x)' - \sin \frac{x}{5} \cdot \left(\frac{x}{5} \right)' + \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})} \\ y' &= 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})} \end{aligned}$$

12. Дата је функција $y = \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{6}$. Израчунати $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=2}$.

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{6} \right)' = \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \right)^3 \right]' = 3 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \right)^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \right)' = 3 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right)} \cdot \left(\frac{\pi x}{6} \right)' \\ &= 3 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right)} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right)} \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=2} &= \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \cdot 2}{6} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi \cdot 2}{6} \right)} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} = 3 \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=2} &= \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi \rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=2} = 6\pi \end{aligned}$$

13. Дате су функције $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $\varphi(x) = \ln(1-x)$. Израчунати $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{(\cos 0)^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \\ \varphi'(x) &= [\ln(1-x)]' = \frac{1}{1-x} (1-x)' = \frac{1}{1-x} (-1) = \frac{-1}{1-x} \rightarrow \varphi'(0) = \frac{-1}{1-0} = -1 \\ \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} &= \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = -1 \end{aligned}$$

14. Наћи други извод функције $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = (x^8 + 7x^6 - 5x + 4)' = (x^8)' + (7x^6)' - (5x)' + 4' = 8x^7 + 7(x^6)' - 5x' + 0 = \\ = 8x^7 + 7 \cdot 6x^5 - 5 \cdot 1 = 8x^7 + 42x^5 - 5$$

$$f''(x) = (8x^7 + 42x^5 - 5)' = (8x^7)' + (42x^5)' - 5' = 8(x^7)' + 42(x^5)' - 0 = 8 \cdot 7x^6 + 42 \cdot 5x^4 = \\ = 56x^6 + 210x^4$$

$$f''(x) = 56x^6 + 210x^4$$

15. Наћи други извод функције $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

РЕШЕЊЕ:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(-x^2-1)'(x^2-1)^2 - (-x^2-1)[(x^2-1)^2]'}{[(x^2-1)^2]^2} \\ = \frac{-2x(x^2-1)^2 + (x^2+1) \cdot 2(x^2-1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^4} \\ = \frac{-2x(x^2-1)^2 + (x^2+1) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2x(x^2-1)^2 + 4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\ = \frac{(x^2-1)[-2x(x^2-1) + 4x(x^2+1)]}{(x^2-1)^4} = \frac{-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} \\ = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

16. Наћи други извод функције $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

РЕШЕЊЕ: Прво ћемо трансформисати функцију f .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3} = \frac{(x^2+3)-3}{x^2+3} = 1 - \frac{3}{x^2+3}$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{3}{x^2+3}\right)' = 1' - \left(\frac{3}{x^2+3}\right)' = -3 \left(\frac{1}{x^2+3}\right)' = -3 \cdot \frac{1'(x^2+3) - 1 \cdot (x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \\ = -3 \cdot \frac{0 \cdot (x^2+3) - 1 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -3 \cdot \frac{-2x}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{6x}{(x^2+3)^2}\right)' = \frac{(6x)'(x^2+3)^2 - 6x[(x^2+3)^2]'}{[(x^2+3)^2]^2} = \frac{6(x^2+3)^2 - 6x \cdot 2(x^2+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^4} \\ = \frac{6(x^2+3)^2 - 12x(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2+3)^2 - 24x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^4} \\ = \frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{6 \cdot (-3)(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = \frac{-18(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-18(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

17. Наћи други извод функције $y = \sin^2 x$.

РЕШЕЊЕ:

$$y' = (\sin^2 x)' = [(\sin x)^2]' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' &= (2 \sin x \cos x)' = 2(\sin x \cos x)' = 2[(\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'] \\ &= 2[\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)] = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x \end{aligned}$$

$$y'' = 2 \cos 2x$$

18. Показати да функција $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ задовољава диференцијалну једначину $y'' - 2y' + y = e^x$.

РЕШЕЊЕ:

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^2e^x\right)' = \frac{1}{2}(x^2e^x)' = \frac{1}{2}[(x^2)'e^x + x^2(e^x)'] = \frac{1}{2}(2xe^x + x^2e^x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x\right)' = \frac{1}{2}[(x^2 + 2x)e^x]' = \frac{1}{2}[(x^2 + 2x)'e^x + (x^2 + 2x)(e^x)'] \\ &= \frac{1}{2}[(2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x] = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)e^x \end{aligned}$$

Сада ћемо $y = \frac{1}{2}x^2e^x$, $y' = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x$ и $y'' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)e^x$ заменити у једначину $y'' - 2y' + y = e^x$. Уколико добијемо да је лева страна једначине једнака e^x , то онда значи да је функција $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ решење дате једначине.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2)e^x - 2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right)e^x - (x^2 + 2x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1 - x^2 - 2x + \frac{x^2}{2}\right)e^x = e^x \end{aligned}$$

Закључујемо да функција $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ задовољава диференцијалну једначину $y'' - 2y' + y = e^x$.

19. Позиција честице је одређена функцијом

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

где је t у секундама и s је у метрима.

(а) Наћи брзину честице v у произвољном тренутку t .

Брзина честице v је први извод функције положаја честице.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(б) Колика је брзина честице после 2 секунде? А после 4 секунде?

Брзину честице после 2 секунде добијамо када ставимо $t = 2$ у израз $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s}$$

Знак минус указује на то да се у посматраном тренутку честица креће са десне на леву страну.

Брзина после 4 секунде је:

$$v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(в) Када је честица у стању мировања?

Честица мирује у оном тренутку када је $v(t) = 0$. То значи да је потребно решити једначину

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$$t_1 = \frac{12 - 6}{6} = 1\text{s}, \quad t_2 = \frac{12 + 6}{6} = 3\text{s}$$

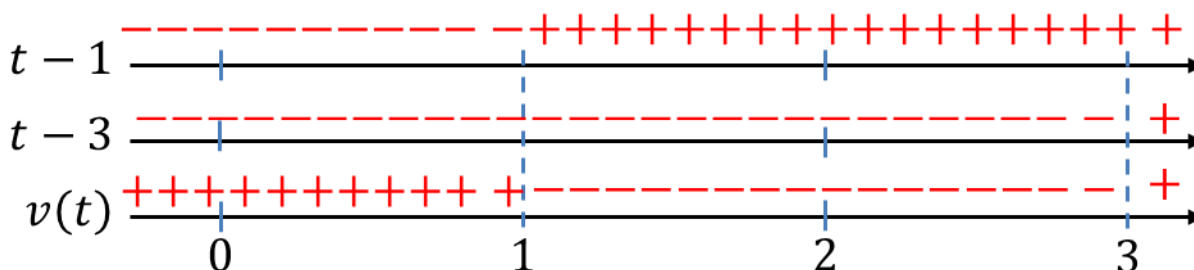
Честица је у мировању после 1 секунде и после 3 секунде од почетка кретања.

(г) Када се честица креће са леве на десну страну, а када са десне на леву страну?

Честица се креће са леве на десну страну (позитиван смер кретања) када је $v(t) > 0$. Са друге стране, честица се креће са десне на леву страну (негативан смер кретања) када је $v(t) < 0$. Дакле, као што видимо, потребно је испитати знак квадратне функције $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. У делу (в) смо нашли нуле ове функције, то су вредности $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$, па се онда функција $v(t)$ може приказати на следећи начин:

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$$

Како је 3 позитиван број, знак функције $v(t)$ зависи од чланова $t - 1$ и $t - 3$.



Слика: Испитивање знака функције $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

Нас интересује случај $t > 0$. Као што видимо, брзина је позитивна (тада се честица креће са леве на десну страну) у интервалима $0 \leq t < 1$ и $t > 3$. Брзина је негативна (тада се честица креће са десне на леву страну) у интервалу $1 < t < 3$. Координате честице у тренуцима $t = 0$, $t = 1$ и $t = 3$ су редом:

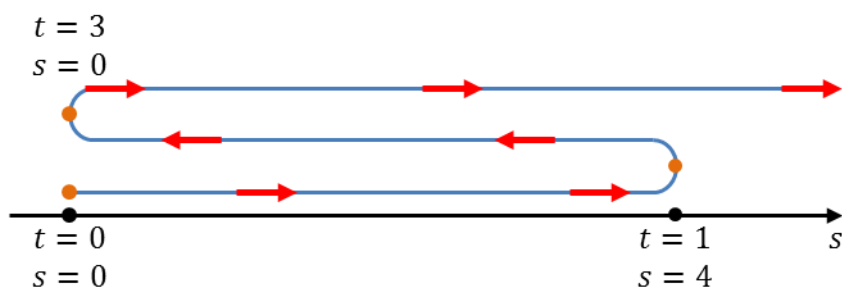
$$s(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$$s(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$$

$$s(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$$

Почетна брзина честице је $v(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

На основу свега што је речено, на слици која се налази испод смо шематски приказали кретање честице.



Слика: Шематски приказ кретања честице

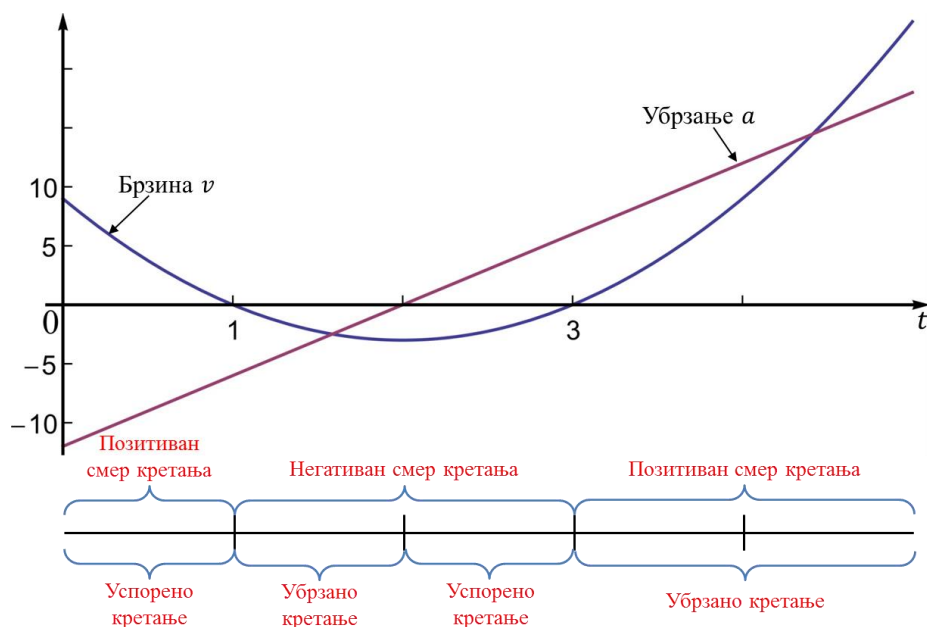
Честица започиње кретање у тренутку $t = 0$ са позиције $s = 0$ и њена почетна брзина износи 9 m/s . Од тог тренутка па све до краја прве секунде честица се креће у позитивном смеру. У тренутку $t = 1$ честица се зауставља (позиција честице је тада $s = 4$) и потом започиње кретање у негативном смеру. Честица се опет зауставља у тренутку $t = 3$ (позиција честице је тада опет $s = 0$). Од тог тренутка па надаље честица се креће у позитивном смеру.

(д) Наћи убрзање честице у произвољном тренутку t и после 4 секунде.

Убрзање је први извод брзине по времену, односно други извод функције положаја по времену.

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \quad \rightarrow \quad a(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

На слици испод су представљене функције $v(t)$ и $a(t)$, и описано је целокупно кретање честице.



Слика: Графички приказ брзине и убрзања честице и опис целокупног кретања

Честица се креће убрзано када брзина v и убрзање a имају исти знак – када су обе функције позитивне или када су обе функције негативне. То се дешава када је $1 < t < 2$ и када је $t > 3$. Честица се креће успорено током оних временских интервала када су брзина и убрзање супротног знака. У нашем примеру то су интервали $0 \leq t < 1$ и $2 < t < 3$.